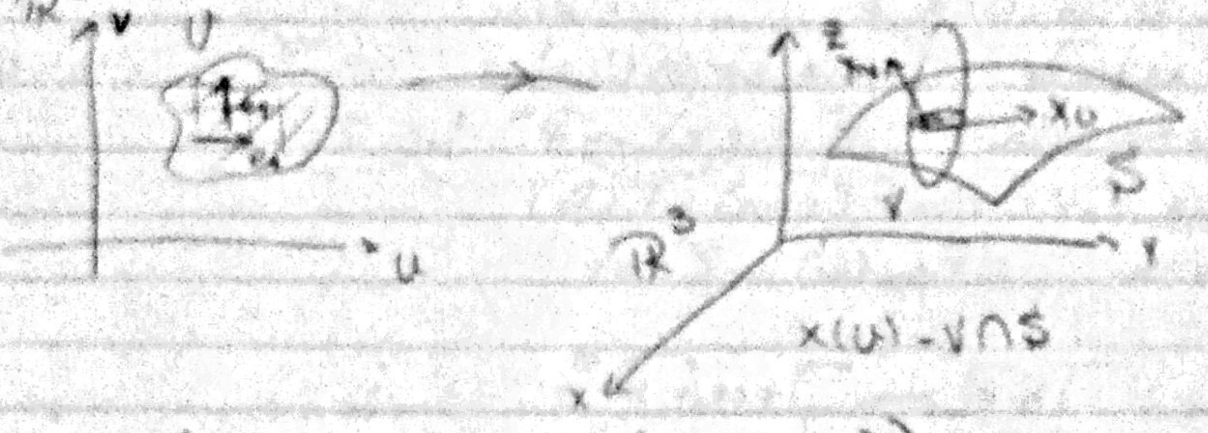
10-11-13

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $S \subset \mathbb{R}^3$ καλείται κανονική επιφάνεια αν για κάθε σημείο $p \in S$, ∃ περιοχή του V και είναι απεικόνιση $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$.

i) Η X είναι λεία (C^3)

ii) Η $X : U \to V \cap S$ είναι ομοιομορφισμός



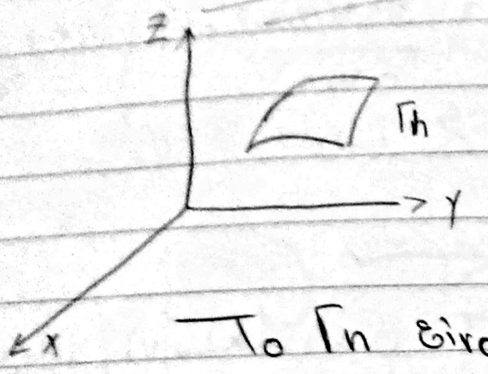
- $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
- X καλείται σύστημα συντεταγμένων της S
- (u,v) καλείται παράμετροι του συστήματος σημείων
- Το $X(U) = V \cap S$ καλείται περιοχή σημείων
- dX_q 1-1 $\Leftrightarrow$ $dX_q(e_1), dX_q(e_2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ $dX_q(e_1) \times dX_q(e_2) \neq 0$
- $dX_q(e_1) = X_u(q)$ — $X(u, v$ σταθερό$)$
- $dX_q(e_2) = X_v(q)$ — $X(u$ σταθερό$, v)$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝ/ΝΩΝ

Άρα

iii) $\boxed{X_u \times X_v(q) \neq 0}$

Επιφάνειες Γραφήματα



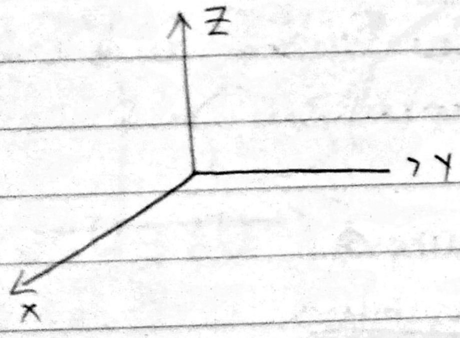
$h: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λεία.

Το γράφημα της h είναι το σύνολο

$\Gamma_h = \{ (x, y, h(x,y)) \mid (x,y) \in U \}$

Το Γ_h είναι κανονική επιφάνεια που καλύπτεται από το εξής μόνο σύστημα συν/νων

$X: U \to V \cap \Gamma_h \quad X(u,v) = (u, v, h(u,v)) \quad V = \mathbb{R}^3$ ως προς το Oxy



$(u, h(u,v), v)$ γραφ. ως προς Oxz

$(h(u,v), u, v)$ γραφ. ως προς Oyz

Κάθε επιφάνεια είναι τοπικά γράφημα.

©οΣχόλιο

▶ Έστω ότι $X: U \to V \cap S$ είναι λεία που πληροί την ιδιότητα (iii)

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

$$X_u(u,v) = (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v))$$

$$X_v(u,v) = (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v))$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

$$X_u \times X_v = \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow X_u \times X_v = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, -\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

Έστω $q_0 = (u_0, v_0) \in U$ $\quad X_u \times X_v(q_0) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(q_0) \,,\, -\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}(q_0) \,,\, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q_0) \right) \neq (0,0,0)$$

Έστω ότι $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q_0) \neq 0$

Θεωρώ την απεικόνιση $F: U \to \mathbb{R}^2$ $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ της οποίας η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι η $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

Επειδή η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q_0) \neq 0$, τότε εφαρμόζεται το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, δηλαδή $\exists$ περιοχή $U_0 \subseteq U$ του q_0 τ.ω. $\pi \circ X|_{U_0} \to \pi \circ X(U_0)$ <u>διαφορίσιμος</u>

$$\Rightarrow \begin{cases} x(u,v)=x \\ y(u,v)=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

$$X(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) = (x,\ y,\ \underbrace{z(u(x,y), v(x,y))}_{h(x,y)})$$

Αν υποθέσω ότι η $X: U \to V \cap S$ είναι 1-1, τότε

$$(X|_{U_0})^{-1} = (\pi \circ X|_{U_0})^{-1} \circ \pi$$

□

□

Πρόταση: Έστω S κανονική επιφάνεια και $X: U \to V \cap S$ απεικόνιση επί που πληρεί τις (i), (ii), (iii) του ορισμού. Τότε:

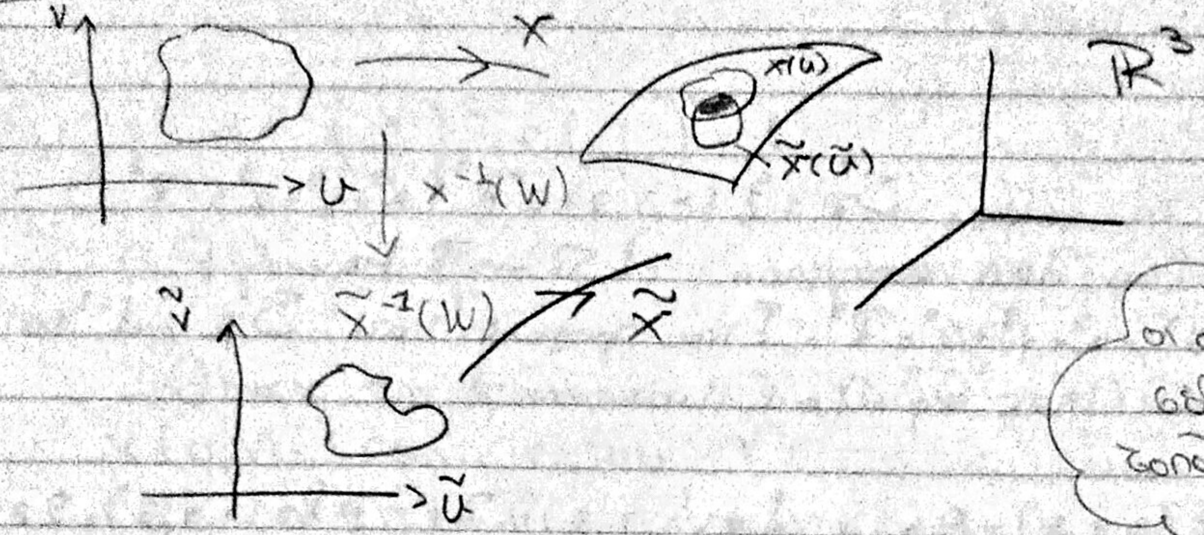
(1) $\forall q_0 \in U$ υπάρχει απεικόνιση $U_0 \subseteq U$ με $q_0 \in U$ τω $\pi \circ X|_{U_0}$ να είναι διαφορίσιμες στην εικόνα όπου η π είναι η προβολή σε ένα από τα Oxy, Oxz, Oyz επίπεδα.

(τις μερικές παραγώγους θα της δηλώνω με δείκτες)

(2) Τοπικά η S είναι γράφημα

(3) Αν επιπλέον η X είναι 1-1, τότε είναι ομοιομορφισμός

Παρατήρηση: Έστω S κανονική επιφάνεια και



οι ομοιομορφισμοί σέβονται όλες τις τοπολογικές έννοιες

Σχόλιο

$X: U \to S$ $\quad \tilde{X}: \tilde{U} \to S$ σύστημα συντεταγμένων της S με

$W: X(U) \cap \tilde{X}(\tilde{U}) \neq \emptyset$ $\quad$ συσχετίζει τις συντ/νες του X και $\tilde{X}$

Ορίζω την απεικόνιση: $\tilde{X}^{-1} \circ X : X^{-1}(W) \to \tilde{X}^{-1}(W)$, με

$\tilde{X}^{-1} \circ X$ είναι λεία ~~και~~ διαφορομορφισμός

ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

Απόδειξη

$$(\tilde{X}|)^{-1} = (\pi \circ \tilde{X})^{-1} \circ \pi \longrightarrow (\tilde{X}|)^{-1} \circ X = (\pi \circ \tilde{X})^{-1} \circ \pi \circ X$$

$\square$

Μια μέθοδος κατασκευής κανονικών επιφανειών

Κρίσιμα σημεία συναρτήσεων (λείων) $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Το σημείο $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$ είναι κρίσιμο σημείο της f αν και μόνο αν

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = f_z(P_0) = 0$$

Θεώρημα: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση και $a \in f(U)$. Αν το σύνολο $f^{-1}(a) = \{P \in U \mid f(P) = a\}$ δεν περιέχει κανένα κρίσιμο σημείο της f, τότε το $f^{-1}(a)$ είναι κανονική επιφάνεια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

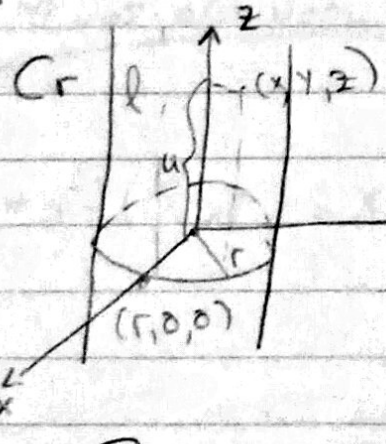
1) Θεωρώ τη σφαίρα $S^2_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\}$
Θεωρώ τη λεία συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2$. Είναι προφανές ότι $S^2_R = f^{-1}(0)$
Αναζητώ τα κρίσιμα σημεία της f.

$$f_x(x,y,z) = 2x \qquad f_y(x,y,z) = 2y \qquad f_z(x,y,z) = 2z.$$

Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $O=(0,0,0) \notin f^{-1}(0) \xrightarrow[\text{θεώρημα}]{} S^2_R$ κανονική επιφάνεια.

□

2) Ορθός κυκλικός κύλινδρος



$Cr = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = r^2\}$
Θεωρώ τη συνάρτηση
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με
$f(x,y,z) = x^2+y^2-r^2$

Προφανώς, $= Cr$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος.

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = 0 \\ f_y(x,y,z) = 0 \\ f_z(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\iff$ Το σύνολο των κρίσιμων σημείων είναι το $\{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ δηλαδή ο άξονας Oz.

Προφανώς $(0,0,z) \notin C_r$ $\forall z \in \mathbb{R}$. Άρα, η C_r είναι κανονική επιφάνεια. $\square$

Εύρεση συστήματος συντεταγμένων

όταν δημιουργώ ένα σύστημα συντεταγμένων ΣΚΟΠΟΣ μου να καλύψω όσο το δυνατόν το μεγαλύτερο μέρος της επιφάνειας

$$C_r: \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

Θέτω, $\frac{x}{r} = \cos u$, $\frac{y}{r} = \sin u$, $z = v$.

Σχόλιο

Θεωρώ την απεικόνιση $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap C_r$,

$X(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$

$U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ (ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$)

$V = \mathbb{R}^3 \setminus \lambda$ (ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^3$)

$X_u(u,v) = (-r\sin u, r\cos u, 0)$

$X_v(u,v) = (0,0,1)$

τι είναι η ευθεία στον $\mathbb{R}^3$

Δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο, από την τρίτη συνιστώσα, έχω 0, και 1.

$$X_u \times X_v(u,v) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ -r\sin u & r\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (r\cos u, r\sin u, 0) \neq (0,0,0) \quad \forall (u,v) \in U$$

$\Longrightarrow$ X σύστημα συντεταγμένων, αφού X είναι 1-1

$X(u_1,v_1) = X(u_2,v_2) \Rightarrow (r\cos u_1, r\sin u_1, v_1) = (r\cos u_2, r\sin u_2, v_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{v_1 = v_2} \\ \cos u_1 = \cos u_2 \\ \sin u_1 = \sin u_2 \end{cases} \xrightarrow[u_1, u_2 \in (0,2\pi)]{} \boxed{u_1 = u_2}$$

$\square$

3] Θεωρώ το σύνολο $\Sigma_r = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=r^2\}$
Θεωρώ την συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-r^2$

$\Sigma_r = f^{-1}(0)$. Βρίσκω τα κρίσιμα σημεία της f λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \\ f_z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \\ -2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0,0) \notin f(0)$

$\Longrightarrow \Sigma_r$ είναι κανονική επιφάνεια. □

Θεώρημα

Πρόταση Μια κανονική επιφάνεια είναι συνεκτική $\Rightarrow$ είναι τροχιακά συνεκτική.

τροχιακά συνεκτικό σύνολο όταν 2 σημεία του μπορώ να τα ενώσω με μία συνεχή καμπύλη.

$\forall$ τροχιακό συνεκτικό σύνολο $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ συνεκτικό σύνολο. Το αντίθετο δεν ισχύει.

Σχόλια

Απόδειξη του Θεωρήματος:

Έστω $P\in f^{-1}(a)$. Επειδή το $f^{-1}(a)$ δεν περιέχει κρίσιμα σημεία της f κάποια από τις $f_x(P)$, $f_y(P)$, $f_z(P)$ είναι $\neq 0$
Υποθέτω, ότι $f_z(P)\neq 0$.
Ορίζω την απεικόνιση $F: U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, η οποία είναι λεία.
$F(x,y,z) = (x, y, f(x,y,z)) = (u, v, t)$
Η Ιακωβιανή ορίζουσα της F στο P είναι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(P) & f_y(P) & f_z(P) \end{vmatrix} = f_z(P) \neq 0$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, δηλαδή το σύστημα $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ f(x,y,z) = t \end{cases}$ έχει μοναδική λύση $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = h(u,v,t) \end{cases}$

Στην επιφάνεια μου έχω: $x = u$, $y = v$, $z = \underbrace{h(u,v,a)}_{\text{συνάρτηση}}$

$\square$

► Διαφορίσιμες συναρτήσεις σε κανονική επιφάνεια (ή σε ανοικτό υποσύνολο της επιφάνειας)

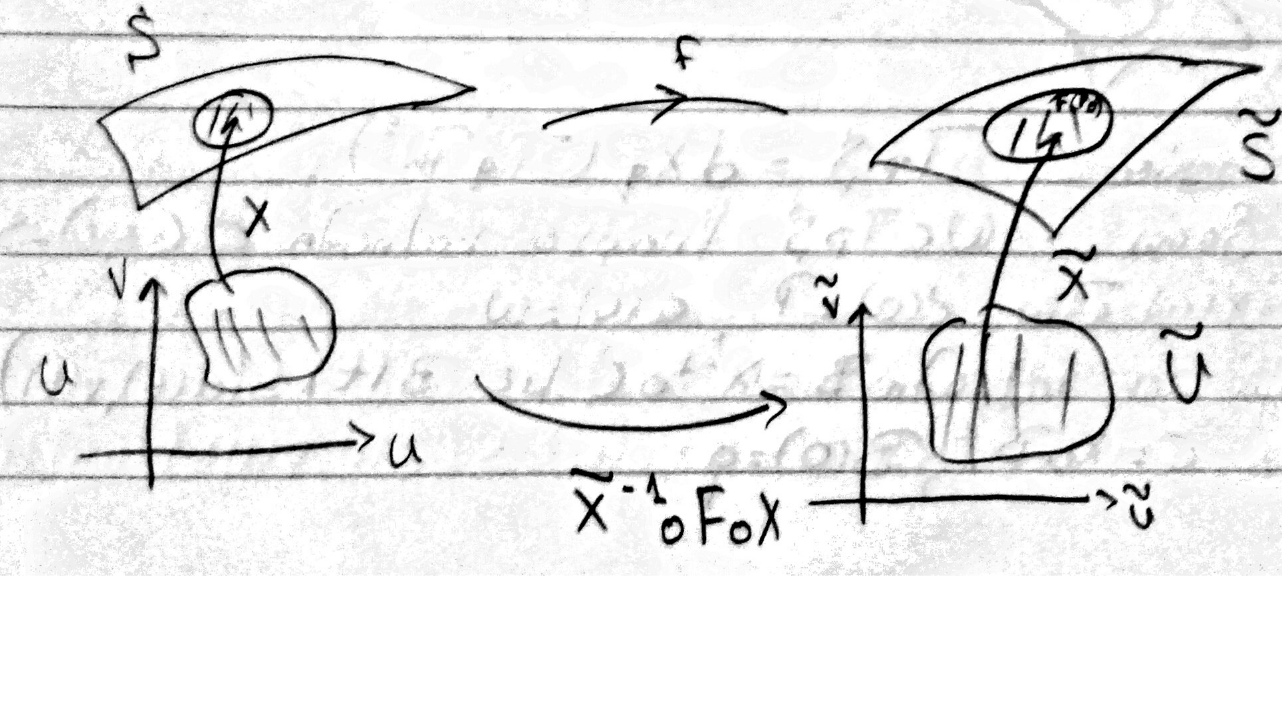
ορισμός: Έστω S κανονική επιφάνεια και $f: S \to \mathbb{R}$. Η f καλείται διαφορίσιμη στο P_0 αν για κάποιο σύστημα συντεταγμένων $X: U \to S$ με $P_0 \in X(U)$ η $f \circ X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $X^{-1}(P_0)$. Η f καλείται διαφορίσιμη αν και μόνο αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $P_0 \in S$.

Διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ κανονικών επιφανειών

<u>ορισμός</u>: Έστω S, $\tilde{S}$ κανονικές επιφάνειες και $f: S \to \tilde{S}$ συνεχής. Η f καλείται <u>διαφορίσιμη</u> στο $P_0 \in S$ αν και μόνο αν για σύστημα συντεταγμένων $X: U \to S$ με $P_0 \in X(U)$

$\tilde{X}: \tilde{U} \to \tilde{S}$ με $f(P_0) \in \tilde{X}(\tilde{U})$

και $f(X(U)) \subset \tilde{X}(\tilde{U})$



Τότε, η $\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X$ είναι διαφορίσιμη στο $X^{-1}(P_0)$. Η F καλείται διαφορίσιμη αν και μόνο αν είναι διαφορίσιμη $\forall P_0 \in S$

$$\tilde{Y}^{-1} \circ F \circ Y = (\tilde{Y}^{-1} \circ \tilde{X}) \circ (\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X) \circ (X^{-1} \circ Y)$$

κάθε ανοιχτό υποσύνολο επιφάνειας είναι κανονική επιφάνεια.

παρατήρηση

Εφαπτόμενα διαστήματα - Εφαπτόμενο επίπεδο

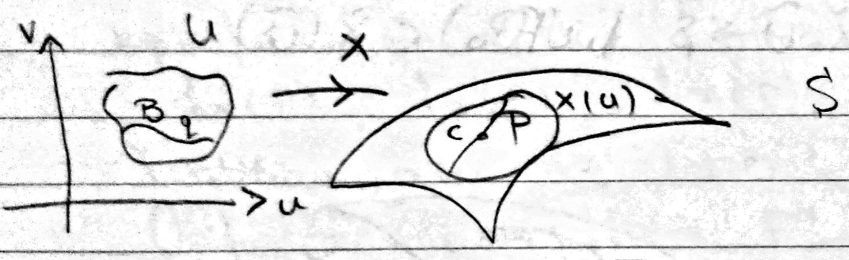
ορισμός: Έστω P σημείο κανονικής επιφάνειας S. Το διάνυσμα $W \in T_P\mathbb{R}^3$ καλείται εφαπτόμενο διάνυσμα της S στο σημείο P αν και μόνο αν υπάρχει επιφανειακή καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = P$ και $c'(0) = W$

Το σύνολο των εφαπτομένων διανυσμάτων της S στο σημείο της P συμβολίζεται με: T_PS

$$\boxed{T_PS \subset T_P\mathbb{R}^3}$$

$$\boxed{T_pS \subset T_p\mathbb{R}^3}$$

Πρόταση: Έστω S κανονική επιφάνεια και $P \in S$.
Αν $X : U \to S$ είναι σύστημα συντεταγμένων με $P \in X(U)$ και $X(q) = P$



Τότε ισχύει $T_pS = dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$

Απόδειξη $(\Rightarrow)$ Έστω $w \in T_pS$. Υπάρχει καμπύλη $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X(U)$. Τω $c(0) = P$ $c'(0) = w$

Ορίζω την καμπύλη $B = X^{-1} \circ c$ με $B(t) = (u(t), v(t))$

$c = X \circ B$, $B(0) = q$

$\omega = c'(0) = (X \circ B)'(0) = dX_{B(0)}(B'(0)) = dX_q(B'(0)) \in T_q\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \omega \in dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$

Άρα, $\underline{T_pS \subseteq dX_q(T_q\mathbb{R}^2)}$.

$(\Leftarrow)$

Έστω $\omega \in dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$. Δηλαδή $\omega \in dX_q(\vec{u})$, $u \in T_q\mathbb{R}^2$

Θεωρώ καμπύλη $B: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, $B(0) = q$, $B'(0) = \vec{u}$

Ορίζω, $c = X \circ B$, $c(0) = X(B(0)) = X(q) = P$

$c'(0) = (X \circ B)(0) = dX_q(B'(0)) = dX_q(\vec{u}) = \omega$

$\Rightarrow \underline{\omega \in T_p S}$

$\square$

Άρα, T_pS είναι το εφαπτόμενο επίπεδο.

$c = X \circ B$, $B(0) = q$ $\quad c(t) = X(u(t), v(t))$

$\omega = c'(0) = u'(0) X_u(u(0), v(0)) + v'(0) X_v(u(0), v(0))$

$\boxed{\omega = u'(0) X_u(q) + v'(0) X_v(q)}$

Συμπέρασμα: Για κάθε σύστημα συντ/νων $X(u,v)$ τα διανύσματα $\{X_u(u,v), X_v(u,v)\}$ αποτελούν βάση του εφαπτομένου επιπέδου $T_{X(u,v)}S$

Έχουμε πλήθωρα βάσεων, αυτό οφείλεται στην αλλαγή του συστήματος συντ/νων.

Σχόλιο